Μάθημα 16ο 09/05/2017

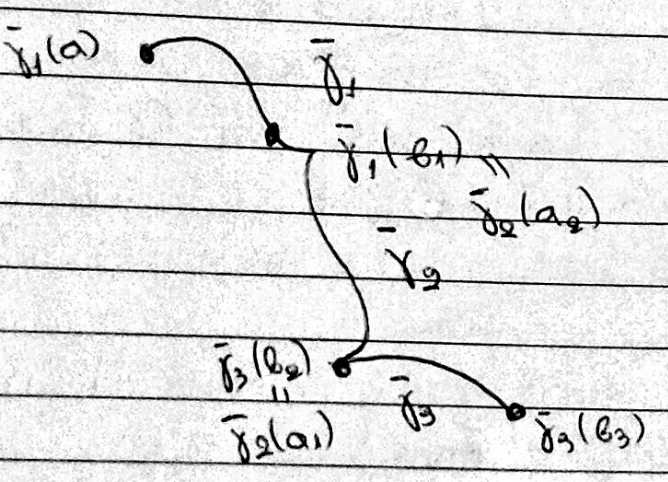
Απειρ4

<u>Ορισμός:</u> Έστω οι καμπύλες $\bar{\gamma}_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ με $\bar{\gamma}_i(b_i) = \bar{\gamma}_{i+1}(a_{i+1})$, $i = 1, \dots, k-1$

$\Rightarrow$ Η καμπύλη $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ με $a = a_1$, $b = a_1 + \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$

και $\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}_i \left(t + a_i - a_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j) \right)$

$\forall\ t \in \left[a_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j),\ a_1 + \sum_{j=1}^{i} (b_j - a_j) \right]$, $i = 1, \dots, k$



[<u>Υπενθύμιση:</u> Ο τύπος μας καθορίζει θεωρητικά, στην πράξη όπως θα δούμε δεν θα μας χρειάζεται στις περισσότερες περιπτώσεις]

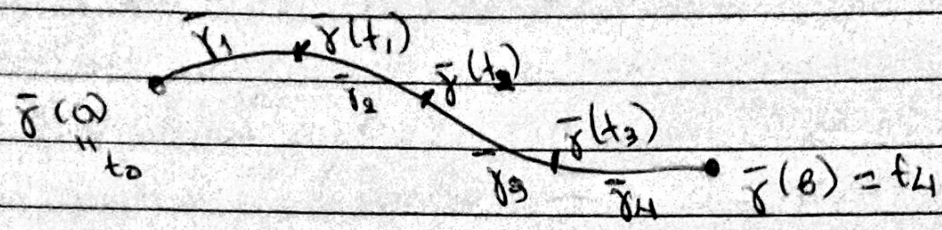
(Η καμπύλη αυτή, η $\bar{\gamma}$) ονομάζεται ένωση των καμπυλών $\bar{\gamma}_i$, $i = 1, \dots, k$ και θα τη συμβολίζουμε $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_k$
και αντίστοιχα για $C = \bar{\gamma}([a, b])$, $C_i = \bar{\gamma}_i([a_i, b_i])$
γράφουμε $C = C_1 \oplus \oplus \dots C_k$

Η $\bar{\gamma}$ αυτή ονομάζεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη (C^1) ή <u>κατά τμήματα κανονική</u>.

A. οι $\bar{\gamma}_i$ είναι C^1, ή κανονικές αντίστοιχα

Παρατήρηση: Αν $\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και $P=\{t_0,t_1,\dots,t_k\}\subset[a,b]$ μια διαμέριση, τότε $\bar\gamma = \bar\gamma_1 \oplus \bar\gamma_2 \oplus \dots \oplus \bar\gamma_k$ όπου

$$\bar\gamma_i = \bar\gamma\big|_{[t_{i-1},t_i]}$$



Η $\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται κατ. C^1 ή κ.τ. κανονική αν υπάρχει διαμέριση P έτσι ώστε η ένωση ⊕ να είναι κτ C^1 ή κτ. κανονική.

Ορισμός: Έστω $\bar\gamma = \bar\gamma_1\oplus\dots\oplus\bar\gamma_n : [a,b]\to\mathbb{R}^n$ και C^1. Τότε:

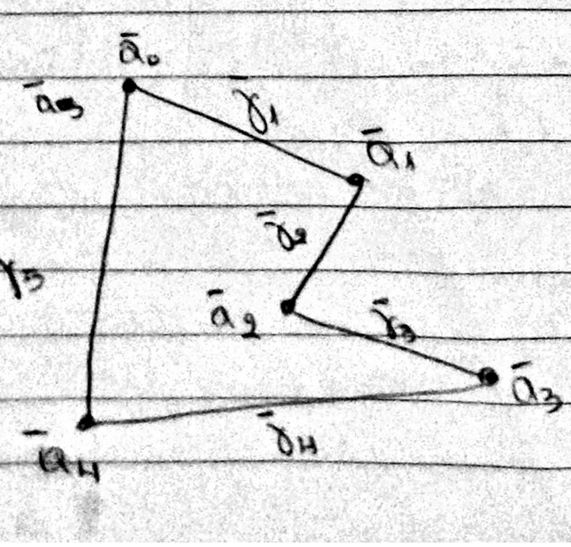
$$L(\bar\gamma) = \sum_{i=1}^{n} L(\bar\gamma_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\bar\gamma}_i(t)\|\,dt$$

1-1

Παρατήρηση: Αν η παραμέτρηση $\bar\gamma$ είναι απλή ή απλή κλειστή τότε μπορούμε να γράψουμε $L(C)=\sum_{i=1}^{k} L(C_i)$
όπου $C=\bar\gamma([a,b])$, $C_i=\bar\gamma_i([a_i,b_i])$

Παράδειγμα (505)

Έστω $\bar a_i\in\mathbb{R}^n$, $i=0,\dots,k$, με $\bar a_{i-1}\neq\bar a_i$, $i=1,\dots,k$
και $\bar\gamma_i(t)=\bar a_{i-1}+t(\bar a_i-\bar a_{i-1})$, $t\in[0,1]$



Τότε η ένωση $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_k$ είναι κατά τμήματα κανονική αφού $\bar{\gamma}_i'(t) = \bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}$ 1-1.

Αυτή η $\bar{\gamma}$ λέγεται <u>πολυγωνική γραμμή (ή καμπύλη)</u> που ενώνει κατά σειρά τα $k+1$ σημεία, a_i, βλ. σχήμα. Μια πολυγωνική γραμμή έχει μήκος

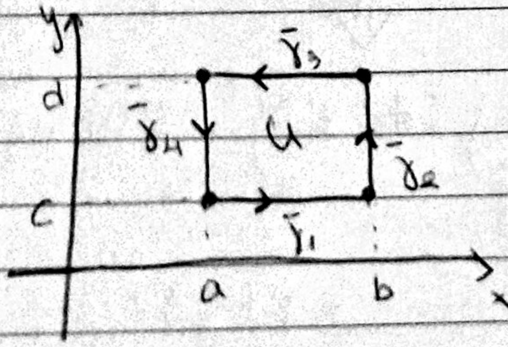
$$L(\bar{\gamma}) = \sum_{i=1}^{k} L(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^1 \|\bar{\gamma}_i'(t)\| dt = \sum_{i=1}^{k} \|\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}\|$$

<u>Παράδειγμα</u> (SOS)

Έστω $U = [a,b] \times [c,d]$. Παραμετρικοποιήστε το ∂U ως καμπύλη και βρείτε το μήκος του

<u>Λύση:</u>

Το ∂U είναι η εικόνα μιας καμπύλης: $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \bar{\gamma}_3 \oplus \bar{\gamma}_4$



$\bar{\gamma}_1(t) = (a,c) + t\big((b,c) - (a,c)\big)$, $t \in [0,1]$

(Ανεξάρτητα από αυτήν την παραμετρικοποίηση υπάρχει και η $\bar{\gamma}_1(t) = (t,c)$, $t \in [a,b]$)

$\bar{\gamma}_2(t) = (b,c) + t\big((b,d) - (b,c)\big)$, $t \in [0,1]$

$\bar{\gamma}_3(t) = (b,d) + t\big((a,d) - (b,d)\big)$, $t \in [0,1]$

$\bar{\gamma}_4(t) = (a,d) + t\big((a,c) - (a,d)\big)$, $t \in [0,1]$

Τότε η ένωση $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_k$ είναι κατά τμήματα κανονική αφού $\bar{\gamma}_i'(t) = \bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}$ 1-1.

Αυτή η $\bar{\gamma}$ λέγεται <u>πολυγωνική γραμμή (ή καμπύλη)</u> που ενώνει κατά σειρά τα $k+1$ σημεία, a_i, βλ. σχήμα. Μια πολυγωνική γραμμή έχει μήκος

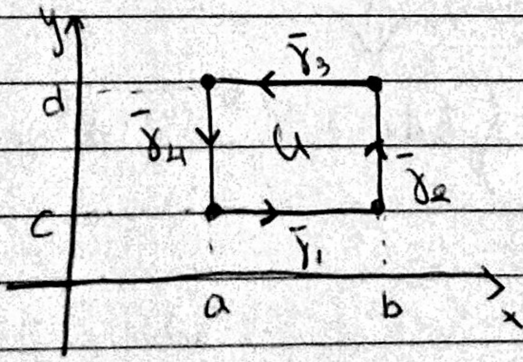
$$L(\bar{\gamma}) = \sum_{i=1}^{k} L(\bar{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^1 \|\bar{\gamma}_i'(t)\| dt = \sum_{i=1}^{k} \|\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}\|$$

<u>Παράδειγμα</u> (SOS)

Έστω $U = [a,b]\times[c,d]$. Παραμετρικοποιήστε το ∂U ως καμπύλη και βρείτε το μήκος του.

<u>Λύση:</u>

Το ∂U είναι η εικόνα μιας καμπύλης: $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 \oplus \bar{\gamma}_3 \oplus \bar{\gamma}_4$



$$\bar{\gamma}_1(t) = (a,c) + t\big((b,c) - (a,c)\big), \quad t \in [0,1]$$

(Ανεξάρτητα από αυτήν την παραμετρικοποίηση υπάρχει και η $\bar{\delta}_1(t) = (t,c)$, $t \in [a,b]$)

$$\bar{\gamma}_2(t) = (b,c) + t\big((b,d) - (b,c)\big), \quad t \in [0,1]$$
$$\bar{\gamma}_3(t) = (b,d) + t\big((a,d) - (b,d)\big), \quad t \in [0,1]$$
$$\bar{\gamma}_4(t) = (a,d) + t\big((a,c) - (a,d)\big), \quad t \in [0,1]$$

με μήκος , αφού :

$\bar{\gamma}_1'(t) = (\underbrace{b-a}_{>0}, 0)$

$\bar{\gamma}_2'(t) = (0, \underbrace{d-c}_{>0})$

$\bar{\gamma}_3'(t) = (\underbrace{a-b}_{<0}, 0)$

$\bar{\gamma}_4'(t) = (0, \underbrace{c-d}_{<0})$

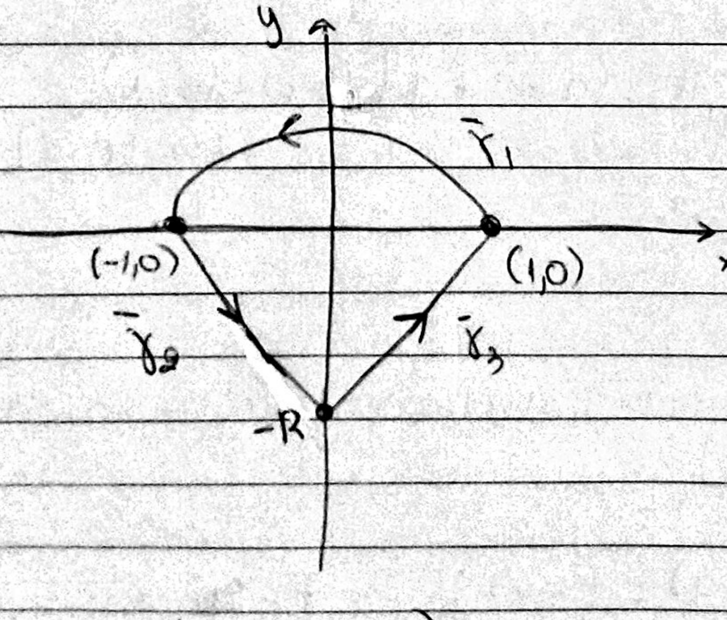
$L(\bar{\gamma}) = L(\partial U) = L(\bar{\gamma}_1) + \ldots + L(\bar{\gamma}_4) = 2(b-a) + 2(d-c)$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα (πραγματικών συναρτήσεων)

Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1-καμπύλη και $f : \bar{\gamma}([a,b]) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση. Τότε, το $\int_{\bar{\gamma}} f\, ds := \int_a^b f(\bar{\gamma}(t))\, \|\bar{\gamma}'(t)\|\, dt$

$\Downarrow$

$\int_{\bar{\gamma}} 1\, ds = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\| dt = L(\bar{\gamma})$



$\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi]$

$\bar{\gamma}_2(t) = (-1,0) + t((0,-R) - (-1,0)), \quad t \in [0,1]$

$\bar{\gamma}_3(t) = (0,-R) + t((1,0) - (0,-R)), \quad t \in [0,1]$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς μήκος καμπύλης

Ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρ. ως προς μήκος καμπύλης

Έστω $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 καμπύλη και $f, g : \bar{\gamma}([a,b]) \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $\varphi : [A,B] \to [a,b]$ ένας C^1 - πμ. και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

(α) $$\int_{\bar{\gamma}\circ\varphi} f\,ds = \int_{\bar{\gamma}} f\,ds$$

$$\int_{\bar{\gamma}\circ\varphi} f\,ds \overset{\text{ορ}}{=} \int_A^B f(\bar{\gamma}(\varphi(\tau)))\,\|\overbrace{(\bar{\gamma}\circ\varphi)'(\tau)}^{\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)}\|\,d\tau$$

$$\int_{\bar{\gamma}} f\,ds = \int_a^b f(\bar{\gamma}(t))\,\|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_A^B f((\bar{\gamma}\circ\varphi)(\tau))\,\|\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\|\,|\varphi'(\tau)|\,d\tau$$

(β) $$\int_{\bar{\gamma}} (\lambda f + \mu g)\,ds = \lambda \int_{\bar{\gamma}} f\,ds + \mu \int_{\bar{\gamma}} g\,ds$$

(γ) $$\int_{\bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2} f\,ds = \int_{\bar{\gamma}_1} f\,ds + \int_{\bar{\gamma}_2} f\,ds$$

(δ) $$\left| \int_{\bar{\gamma}} f\,ds \right| \leq \left(\max_{\bar{x} \in \bar{\gamma}([a,b])} |f| \right) L(\bar{\gamma})$$